

Leçon 104

Groupes finis. Exemples et applications

I - Groupes finis

II - Groupes abéliens finis

III - Exemples remarquables

IV - Représentations de groupes

Dev 1 : Théorèmes de Sylow

Dev 2 : Automorphismes de \mathfrak{S}_n

I - Groupes finis

1) Ordre et indice : def ordre, indice, thm de Lagrange, def ss-grp distingué, quotient, def ordre, propriétés, exemples [Rom21]

2) Actions de groupe : def action, orbites, stab, action transitive/fidèle/libre, formule des classes, Burnside, app : Cauchy, translation, conjugaison, exemples [Ber18], [Ulm12]

3) Théorèmes de Sylow : def et props p -groupe (centre, classification ordre p^2), p -Sylow, [dev 1][Ber18], [Ulm12]

II - Groupes abéliens finis

1) Groupes cycliques : def congruence, iso $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, description des sous-groupes/générateurs/nilpotents/inversibles/div de zéro, thm d'Euler, de Fermat [Rom21]

2) Théorème de structure : restes chinois, exposant, structure des GAF, exemples [Rom21]

III - Exemples remarquables

1) Groupes symétriques : def, cycles, décomposition en cycles à supp disjoints, app : calcul d'invariants (signature, ordre), conjugaison, transitivité, [dev 2], def et propriétés groupe alterné [Ulm12]

2) Groupes linéaires : centre, sous-groupes, générateurs (transvections/dilatations), groupe dérivé, isos exceptionnels [Rom21]

3) Groupes d'isométries : def $\text{Is}(E)$, $\text{Is}^+(E)$, action, isométries conservant une partie, $\text{Is}^+ \triangleleft \text{Is}$, produit semi-direct, conservation isobarycentre, cas polygones/cube/tétraèdre [Rom21]

IV - Représentations de groupes

1) Représentations linéaires de groupes finis : def, irréductibles, somme directe, invariants, Mashke, Schur, exemples [CG18]

2) Caractères et tables de caractères : def caractères, calcul, exemples, orthogonalité, tables de caractères, action sur le tétraèdre, table de \mathfrak{S}_4 [CG18]

Références

- [Ber18] Grégory BERHUY. *Algèbre : Le grand combat*. Calvage & Mounet, 2018.
- [CG18] Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome Second*. Calvage & Mounet, 2018.
- [Rom21] Jean-Etienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck supérieur, 2021.
- [Ulm12] Félix ULMER. *Théorie des groupes*. Ellipses, 2012.